EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

40e JAARGANG 1964/1965

VIII—1 MEI 1965

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

STRUCTUREN, GROEPEN

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Een van de redenen, waarom velen het gewenst vinden, dat het wiskundeonderwijs aan een grondige herziening wordt onderworpen, is dat het aspect van de moderne wiskunde sterk verschilt van dat van de wiskunde van een halve eeuw geleden, doordat de mathematische structuren een belangrijke rol zijn gaan spelen. Natuurlijk zijn er meer verschillen tussen de wiskunde van voorheen en van thans, maar daar wil ik het in dit artikel niet over hebben. Als men vraagt, welke structuren een rol zouden moeten gaan spelen by het V.W.O., dan is het antwoord als regel: ring, lichaam, groep, lineaire ruimte.

Laten we, voordat we op dit probleem nader ingaan, eerst ons afvragen, wat onder een mathematische structuur verstaan wordt. Ik geloof niet, dat een nauwkeurige afbakening praktisch mogelijk is, evenmin als b.v. vaststaat wat verstaan wordt onder een getal of onder een meetkunde. Dit zijn begrippen, waarvan de inhoud met de ontwikkeling van de wiskunde meegroeit. Men kan in principe wel op een bepaald ogenblik naar believen de inhoud vastleggen, maar ik geloof niet, dat hiermee een wiskundig belang gediend is. Laat ik daarom liever mij ertoe bepalen, uiteen te zetten, wat het eenvoudigste soort structuren behelst.

Gegeven is een verzameling V en enige operaties $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. Deze operaties hebben de eigenschap, dat door elk van hen aan een bepaald aantal elementen van V een element van V toegevoegd wordt. Al naar dit aantal elementen spreken we van unitaire, binaire, ternaire, ... operaties. Zo is b.v. verzameling V met operaties $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y, z)$ een structuur, die voorzien is van drie operaties: één unitaire, één binaire en één ternaire. Natuurlijk is er van zo'n structuur weinig te vertellen, als niet vaststaat, dat de operaties aan bepaalde voorschriften voldoen, zoals commutativiteit, associativiteit, distributiviteit, aanwezigheid van een neutraal element, aanwezigheid van een inverse.

Omdat het verhaal op deze wijze wat abstract dreigt te worden, wil ik direct overgaan op een bekend voorbeeld van een structuur: de *ring*. Gegeven is een verzameling V en twee binaire operaties,

die we zullen noteren met $+$ en $\cdot$. Deze voegen aan elk tweetal elementen van V een element van V toe, d.w.z.

A1. als $a \in V$ en $b \in V$, dan is $a + b \in V$ en $a \cdot b \in V$.

Verder gelden de volgende eigenschappen voor alle $a \in V$, $b \in V$ en $c \in V$:

A2. $a + b = b + a$,

A3. $a + (b + c) = (a + b) + c$,

A4. $\exists x \in V \; \forall y \in V. \; x + y = y$,

A5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

A6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Nadat bewezen is, dat er slechts één element x is, dat aan de in A4 gestelde voorwaarde voldoet, kan men dit element een naam geven. Men noemt het het nulelement, geschreven 0, en voegt nu nog toe:

A7. $\forall x \in V \; \exists y \in V. \; x + y = 0$.

Ook nu bewijst men, dat er bij gegeven x slechts één element y aan deze voorwaarde voldoet. Men noteert dit element $-x$.

Een ring is nu een verzameling V voorzien van twee operaties, waarvoor de eigenschappen A1-7 van kracht zijn. Van welke aard deze verzameling is, doet niets ter zake. Evenmin doet het iets ter zake, hoe we de beide relaties noteren. We hoeven ze dus niet door $+$ en $\cdot$ voor te stellen en ze optelling en vermenigvuldiging te noemen. In ons geval noteren we de ring: ring $(V, +, \cdot)$.

Men heeft hier eigenlijk een eenvoudig voorbeeld van een axiomastelsel. We kennen allen axiomastelsels voor de natuurlijke getallen en voor de vlakke euclidische meetkunde. Deze axiomastelsels zijn vrij gecompliceerd, doordat er hoge eisen aan gesteld worden. Men eist van een dergelijk stelsel, dat het begrip natuurlijk getal of het begrip euclidische tweedimensionale ruimte er ondubbelzinnig door vastgelegd wordt. En dat lukt inderdaad. Het is mogelijk deze axiomastelsels zo op te stellen, dat al hun mogelijke interpretaties (modellen) isomorf zijn (men noemt een axiomastelsel, dat aan deze eis voldoet, categorisch). Juist deze eis van categoriciteit wordt aan een axiomastelsel, dat een structuur bepaalt, niet gesteld. Het axiomastelsel, dat vastlegt, wat een ring is, is zo ruim gekozen, dat er talloze ringen mogelijk zijn met geheel verschillende eigenschappen en die daardoor niet isomorf zijn. Dat is nu juist wat we met een structuur beogen.

De wiskundige is in staat uit A1-7 allerlei eigenschappen af te leiden, die dus voor elke ring van kracht zijn. Zodra hij nu ergens een ring tegenkomt, in welke tak van de wiskunde ook, weet hij, dat alle eigenschappen, die voor ringen in het algemeen afgeleid

zijn, voor deze ring in het bijzonder gelden. Het is duidelijk, dat hierdoor denkeconomie verkregen wordt. En anderzijds zal men, doordat men in verschillende gebieden van de wiskunde dezelfde structuren ontmoet, gemakkelijker het verband tussen deze delen gaan begrijpen.

Voorbeelden van ringen, die binnen het bereik van de schoolwiskunde liggen zijn:

de gehele getallen met de operaties + en ·;

de verzameling van de deelverzamelingen van een vaste verzameling (b.v. de puntverzamelingen in een plat vlak) met de operaties $\cup$ (vereniging) en $\cap$ (doorsnede),

de verzameling van uitspraken in een bepaalde wetenschap met de operaties $\vee$ (of) en $\wedge$ (en),

de verzameling van de restklassen modulo p met de operaties + en ·,

de polynomen met de operaties + en ·.

Men kan natuurlijk verder gaan en zelf voorbeelden bedenken, waarbij men zelfs zover kan gaan, de leerling te laten onderzoeken of men wel of niet met een ring te maken heeft.

In de bovenstaande definitie van een ring is niet opgenomen, dat de ring commutatief is t.a.v. de vermenigvuldiging en een eenheidselement bezit. Men zou dit voor schoolgebruik in de definitie kunnen opnemen.

Zonder twijfel is dit een aantrekkelijk onderwerp voor de docent en ook voor vele leerlingen. Toch dreigt hier gevaar. In feite komen de leerlingen gedurende hun middelbare opleiding één ring tegen: de ring van de gehele getallen. De ring van de deelverzamelingen en de ring van de uitspraken zijn er min of meer met de haren bijgesleept en de restklassen worden ter sprake gebracht om toch nog eens een aardig voorbeeld van een ring te geven. Is het werkelijk in het kader van het V.W.O. zo belangrijk te spreken over ringen of vindt de mathematicus dat zo leuk? Is het van speciaal belang voor hen, die verder wiskunde studeren of ook voor anderen, die de wiskunde als hulpwetenschap zullen gaan hanteren? Ik stel deze vragen, omdat ik vind, dat ze gesteld moeten worden. Zelf zou ik graag ringen met mijn leerlingen behandelen; het lijkt me erg attractief. Maar dergelijke overwegingen mogen bij het bepalen van schoolprogramma's nooit de doorslag geven.

Wat hierboven over ringen gezegd is, geldt m.m. voor lichamen. Zoals bekend vormen de rationale getallen een lichaam en de reële getallen eveneens. Indien men ertoe overgaat weer complexe getallen te gaan behandelen, heeft men nog een voorbeeld van een

lichaam. Erg indrukwekkend is dit niet. Immers de reële getallen zijn een uitbreiding van de rationale getallen en de complexe weer van de reële en deze uitbreiding komt zo tot stand, dat de aard van de hoofdbewerkingen geen wijziging ondergaat. Aardig wordt het pas, als we constateren, dat onder de ringen van de restklassen modulo p lichamen voorkomen. De restklassen modulo p vormen namelijk dan en alleen dan een ring, als p een priemgetal is. Hier treedt een element van verrassing op, maar of dit voldoende reden is om het tot stof voor het V.W.O. te verklaren, betwijfel ik.

Het wil mij voorkomen, dat we meer geluk hebben met de groepen. Laat ik beginnen met vast te leggen, wat onder een groep verstaan wordt. Gegeven is een verzameling V en een binaire operatie, die we met $\times$ zullen aanduiden (waarbij we gemakshalve dit teken als regel zullen weglaten; ab betekent dus $a \times b$).

We gaan nu uit van de volgende axioma's:

A1. Als $a \in V$ en $b \in V$, dan is $ab \in V$,

A2. $a(bc) = (ab)c$ voor elke $a \in V,\ b \in V,\ c \in V$,

A3. $\exists x \in V\ \forall y \in V.\ xy = yx = y$,

waarna bewezen wordt, dat er slechts één dergelijk element x bestaat; dit wordt genoteerd e en eenheidselement genoemd; waarna als laatste axioma volgt:

A4. $\forall x \in V\ \exists y \in V.\ xy = yx = e$.

Ook nu wordt bewezen, dat er bij elke x slechts één dergelijk element y bestaat; dit noemt men de inverse van x; het wordt genoteerd x^{-1}.

Met de axioma's is wel wat ruim omgesprongen. Men kan volstaan met te eisen, dat er een rechter eenheidselement is en dat t.o.v. dit eenheidselement elk element een rechter inverse heeft. M.a.w. het is voldoende te onderstellen: er is een element e, waarvoor geldt $ae = a$ voor elke a(A3′) en bij elke a is er een element a^{-1}, waarvoor $aa^{-1} = e$(A4′). Het is een leuke sport dit uit te puzzelen; de oplossing vindt men in noot [1]). Voor de school is deze kwestie van geen belang.

Of men iets aan groepen in ons toekomstig onderwijs zal hebben, hangt natuurlijk af van het programma. Ik acht zeer wel een programma mogelijk, waarbij met vrucht van groepen gebruik gemaakt

---

[1]) A4′ $\rightarrow a^{-1}a^{-1-1} = e \rightarrow aa^{-1}a^{-1-1} = ae \rightarrow aa^{-1}a^{-1-1} = a \rightarrow ea^{-1-1} = a \rightarrow a^{-1}ea^{-1-1} = a^{-1}a \rightarrow a^{-1}a^{-1-1} = a^{-1}a \rightarrow e = a^{-1}a$ (existentie van een linker inverse) $\rightarrow ae = aa^{-1}a \rightarrow ae = ea \rightarrow a = ea$ (existentie van een linker eenheidselement).

Is e' ook eenheidselement, dan is $ee' = e'$ en $ee' = e$, dus $e = e'$ (uniciteit van het eenheidselement).

Is $aa' = e$, dan is $a^{-1}aa' = a^{-1}$, dus $a' = a^{-1}$ (uniciteit van de inverse).

wordt. Ik ga er daarbij van uit, dat de meetkunde radicaal anders opgebouwd wordt en dat de belangstelling voor de geometrische stelling tot zekere hoogte plaats maakt voor het centraal stellen van de geometrische transformatie. We mogen wel aannemen, dat in het onderwijs van de toekomst afbeeldingen een belangrijke rol gaan spelen. Het is niet mijn bedoeling hier in te gaan op de mogelijkheden, die een dergelijke behandeling bied. Men kan hierover meer vinden in het moderne schoolboek Transformatiemeetkunde van R. Troelstra c.s. (vooral in deel I). Wat hier van belang voor ons is, is het verband tussen transformaties en groepen.

Bij wijze van voorbeeld beschouwen we de verzameling T van de translaties. Onder $t_2 \circ t_1$ verstaan we de transformatie, die ontstaat door samenstelling van t_1 en t_2. Dit is weer een translatie; aan A1 is dus voldaan.

De samenstelling van transformaties heeft de associatieve eigenschap. Zolang we met transformaties te maken hebben, behoeven we dus niet meer te verifiëren, dat aan A2 voldaan is.

Als we de identieke transformatie tot de translaties rekenen, is er een eenheidselement, zodat aan A3 voldaan is. (In het vervolg nemen we stilzwijgend aan, tenzij anders vermeld is, dat tot elke verder gedefinieerde verzameling transformaties ook de identieke gerekend wordt. Dan is automatisch aan A3 voldaan.)

En ten slotte is de inverse van elke translatie weer een translatie, zodat ook aan A4 voldaan is.

Hiermee is bewezen, dat de translaties een groep vormen. We kunnen deze groep noteren: groep $(T, \circ)$.

Vermoedelijk zullen de leerlingen langs deze weg voor het eerst met groepen in aanraking komen. Dit heeft een enorm voordeel, want het begrip groep treedt hier op in een primitief gewaad gestoken. We kunnen namelijk definiëren:

Definitie. We zeggen, dat een verzameling transformaties V (waartoe de identieke transformatie behoort[1]) een *groep* vormen, als

1e. uit $a \in V$ en $b \in V$ volgt $a \circ b \in V$,

2e. elke transformatie van V een inverse heeft, die eveneens tot V behoort.

Gewapend met deze primitieve groepsdefinitie zien we nu gemakkelijk in:

de rotaties om een vast centrum vormen een groep,

de spiegeling om een as vormt met de identiteit een groep.

[1] Strikt genomen behoeft dit niet vermeld te worden, want het is een gevolg van 1e en 2e.

Proberen we verder te komen, dan blijkt al spoedig, dat sommige verzamelingen transformaties het groepskarakter missen. Zo vormen de rotaties geen groep, want de som van twee rotaties kan een translatie zijn. Ook vormen de spiegelingen geen groep, want de som van twee spiegelingen kan een translatie en ook een rotatie zijn. Uit deze opmerkingen volgt echter direct het positieve resultaat:

de translaties en rotaties en hun samenstellingen vormen samen een groep,

de translaties, rotaties en spiegelingen en hun samenstellingen vormen samen een groep.

We zullen deze groepen C_1 resp. C noemen.

Nu definiëren we:

Definitie. Als door een transformatie van groep C figuur F als beeld figuur F' heeft, dan zegt men, dat F *congruent* met F' is.

Definitie. Als door een transformatie van groep C_1 figuur F als beeld figuur F' heeft, dan zegt men, dat F *rechtstreeks congruent* met F' is.

Men noemt C in verband hiermee de groep van de *congruente transformaties*, en C_1 die van de *rechtstreeks congruente transformaties*. Op deze manier zien we meteen het onderscheid tussen rechtstreeks congruente en symmetrische figuren naar voren komen. Maar dit is een nevenopmerking. Laten we tot de hoofdzaken terugkeren. We beschouwen de congruente groep nader.

a. Tot de congruente groep behoort de identieke transformatie. Het beeld van F, als hierop de identieke transformatie uitgevoerd wordt, is F. Dus geldt $F \cong F$.

b. Als $F \cong F'$, dan is er een congruente transformatie c, waarbij F' beeld van F is. De inverse van c is een congruente transformatie c^{-1} (volgens het tweede lid van de definitie van een groep transformaties). Het beeld van F', als daarop c^{-1} uitgevoerd wordt, is F. En dus is ook $F' \cong F$.

c. Onderstel, dat $F \cong F'$ en $F' \cong F''$. Dan is er een congruente transformatie c_1, die in F in F' overvoert en een congruente transformatie c_2, die F' in F'' overvoert. Volgens het eerste lid van de definitie van een groep transformaties is dan ook $c_2 \circ c_1$ een congruente transformatie. En deze voert dan F over in F''. Dus is ook $F \cong F''$.

Hiermee is dus aangetoond:

a. $F \cong F$,

b. $F \cong F' \rightarrow F' \cong F$,

c. $F \cong F'$ en $F' \cong F'' \rightarrow F \cong F''$.

Anders gezegd: de relatie congruent is reflexief, symmetrisch en transitief.

Nu weten we, dat elke reflexieve, symmetrische, transitieve relatie een partitie (klassenindeling) [1]) teweeg brengt. De relatie congruent doet dus de verzameling van alle planimetrische figuren uiteenvallen in verzamelingen van onderling congruente figuren, die twee aan twee geen enkel element gemeen hebben.

Meer algemeen zien we hieruit: een groep transformaties brengt een partitie teweeg in de verzameling van alle planimetrische figuren. Door deze voor groepen transformaties kenmerkende eigenschap worden we ertoe gebracht speciaal verzamelingen transformaties te bestuderen, die een groep vormen.

Laat ik de draad van het verhaal even onderbreken door op te merken, dat dit betoog natuurlijk alleen bestemd is voor schrijvers van leerboeken of opstellers van programma's om als leidraad te dienen voor hetgeen ze op de school behandeld willen zien. Het hier in enkele bladzijden uiteengezette gezichtspunt kan leerlingen wel degelijk duidelijk gemaakt worden, maar alleen als resultaat van een lange reeks voorbeelden. Het zou dan ook zinloos zijn direct na de behandeling van de congruente transformaties de leerling lastig te vallen met dergelijke theoretische overwegingen. We zullen hem dus alleen een definitie geven van congruente figuren gebaseerd op de congruente transformaties en laten het daar voorlopig bij. Eerst als hetzelfde verhaal zich enige keren voorgedaan heeft, kan de leerling rijp worden voor dieper inzicht. We gaan dan ook verder en behandelen andere transformatiegroepen.

We beginnen nu b.v. met het vermenigvuldigen van figuren t.o.v. een punt met een factor, die positief is. Kiezen we het punt vast, dan vormen deze bewerkingen een groep. Hetzelfde is het geval met de vermenigvuldigingen t.o.v. van een vast punt met een willekeurige factor ongelijk aan 0.

Deze groepen zijn wat speciaal, doordat ze gebonden zijn aan een bepaald centrum van vermenigvuldiging. Het ligt voor de hand ons af te vragen, of al deze groepen deel uitmaken van een ruimere groep: de groep van de vermenigvuldigingen t.o.v. willekeurige centra. M.a.w. we vragen ons af, of de samenstelling van twee vermenigvuldigingen t.o.v. verschillende centra weer een vermenigvuldiging oplevert. Bij het onderzoek blijkt, dat dit niet het geval is: het resultaat van de samenstelling kan ook een translatie zijn.

---

[1]) Ik geef de voorkeur aan het door de Belgen gebruikte woord „partitie". Het is kort en duidelijk.

Zo kan b.v. F door vermenigvuldiging met 3 overgaan in F' en F' door vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ t.o.v. een ander centrum in F''. In dat geval zijn F en F'' niet gelijkstandig, maar kan F wel door een translatie in F'' overgevoerd worden.
Uit dit negatieve resultaat volgt echter weer direct een positief resultaat, namelijk dat de vermenigvuldigingen en translaties te samen wel een groep vormen. We noemen deze groep de *homothetische groep* H.

Definitie. Als figuur F door een homothetische transformatie over kan gaan in figuur F', dan heet F *homothetisch* met F'.

We weten nu, dat de relatie homothetisch weer een equivalentierelatie is en dat deze relatie een partitie teweegbrengt van de planimetrische figuren.

De zo gedefinieerde homothetie verschilt van de in de schoolwiskunde gebruikelijke gelijkstandigheid. Twee figuren zijn gelijkstandig, als de een door vermenigvuldiging in de ander kan overgaan. De vermenigvuldigingen vormen geen groep, omdat de relatie gelijkstandig niet transitief is. Ze is dus geen equivalentierelatie en ze brengt geen partitie van de planimetrische figuren tot stand. Vandaar dat meer belang gehecht is aan de relatie homothetisch in de bovengenoemde zin.

We hebben in het voorgaande gevonden, dat een figuur overgaat in een ermee congruente, als we er een serie translaties, rotaties en spiegelingen op uitvoeren. En een figuur gaat over in een ermee homothetische door uitvoering van vermenigvuldigingen en translaties. Het ligt nu voor de hand al deze transformaties toe te laten, d.w.z. transformaties te beschouwen, die ontstaan door samenstelling van een serie transformaties uit de groepen C en H. Deze vormen blijkbaar een groep. We noemen deze groep de *gelijkvormige groep* G.

Definitie. Als figuur F door een gelijkvormige transformatie over kan gaan in figuur F', dan heet F *gelijkvormig* met F'.

Weer hebben we hier te maken met een equivalentierelatie, die dus een partitie tot stand brengt.

Omdat C en H ondergroepen van G zijn geldt: als twee figuren congruent en ook als twee figuren homothetisch zijn, dan zijn ze gelijkvormig.

Als sluitstuk van deze beschouwingen kunnen we de affiene groep behandelen. M.i. kan men dit het gemakkelijkst doen door met vectoren te werken. Nu zal hoogstwaarschijnlijk het vectorbegrip in ons toekomstige onderwijs een rol gaan spelen. Het ligt dan voor de hand de leerlingen met het vectorbegrip vertrouwd te maken,

zodra dit maar mogelijk is. De beste aanleiding hiertoe bieden de translaties. Een translatie is bepaald, als we één punt P en zijn beeldpunt geven. Beschouwen we de verzameling van alle translaties, dan kan men daarbij het punt P telkens hetzelfde kiezen. De translaties zijn dan bepaald door geordende puntenparen, waarvan het eerste punt steeds hetzelfde is. De elementen van een dergelijke verzameling geordende puntenparen noemen we vectoren; de verzameling zelf heet een vectorveld, P de oorsprong van het veld.

Het zal menigeen verbazen, dat ik deze definitie van een vector niet op wetenschappelijke maar op didactische gronden gekozen heb. Allereerst zou men ook kunnen afspreken, dat een vector een geordend puntenpaar is, zonder een vast beginpunt te eisen. Dit maakt zonder twijfel het optellen van vectoren en het vermenigvuldigen van een vector met een scalair minder gemakkelijk begrijpelijk. Vandaar, dat ik de voorkeur geef aan gebonden vectoren boven vrije vectoren. (Liefhebbers van vrije vectoren worden er veelal toe gebracht naast hun vrije vectoren zg. plaatsvectoren in te voeren, als het om meetkundige toepassingen gaat. Dit zou stellig moeilijk zijn voor de middelbare scholier.) Verder kan men er zijn verbazing over uitspreken, dat de vector als puntenpaar gedefinieerd wordt en niet als 'pijl'. Dit kan alleen de docent verbazen. De leerling komt hier de vector voor het eerst tegen en vindt een puntenpaar stellig niet moeilijker dan een 'pijl'. Als we bedenken, dat deze pijl ook nog nimmer gedefinieerd is en dus eerst als gericht lijnstuk het leven moet zien, waarbij het richten van een lijnstuk mathematisch gezien ook al geen alledaagse bezigheid voor de scholier is, dan valt het voordeel van het geordende puntenpaar dunkt me wel op. Straks zullen we nog een ander voordeel zien.

Welnu, nadat men dus kennisgemaakt heeft met vectoren en met de optelling en de scalaire vermenigvuldiging van vectoren, kunnen we vaststellen, dat als we in een vectorveld met oorsprong P twee vectoren v_1 en v_2 kiezen, waarvan de eindpunten niet met P op één lijn liggen, elke vector van het veld te schrijven is in de vorm $a_1v_1 + a_2v_2$. Kies nu twee velden met oorsprongen P en Q. De vectoren van het ene veld schrijven we in de vorm $a_1v_1 + a_2v_2$ en die van het andere in de vorm $b_1w_1 + b_2w_2$. Onder een *affiene transformatie* van het vlak verstaan we nu een transformatie, waarbij P overgaat in Q, v_1 in w_1, v_2 in w_2 en verder algemeen $a_1v_1 + a_2v_2$ in $a_1w_1 + a_2w_2$.

Als men onder een vector een pijl wenst te verstaan, zal men er hier op moeten letten, dat de definitie van een affiene transformatie alleen inhoudt, dat begin- en eindpunt van een vector getrans-

formeerd worden volgens de opgegeven regel [1]). Wie een vector ziet als een puntenpaar, ontmoet hier geen moeilijkheden.

Het is al heel eenvoudig in te zien, dat de affiene transformaties een groep vormen. En zo komen we weer tot de volgende definitie.

Definitie. Als figuur F door een affiene transformatie over kan gaan in figuur F', dan heet F *affien* met F'.

Weer ontstaat zo een partitie van de planimetrische figuren. Maar deze partitie heeft het grote voordeel boven de drie voorgaande, dat de aanschouwelijke achtergrond ontbreekt. De leerling zal niet door de figuur te raadplegen de vraag kunnen beantwoorden, of alle driehoeken affien zijn en of alle vierhoeken affien zijn. En juist daardoor wordt het mogelijk, dat hij een beter inzicht krijgt in de situatie. Hij zal nu beter kunnen begrijpen, wat de betekenis van een partitie is en wat in verband hiermee de betekenis van een groep transformaties is.

Een stap verder zou zijn de vraag naar de eigenschappen van een figuur, die invariant zijn t.o.v. een groep transformaties. Als we hier officieel op ingaan, zouden we het Erlanger programma in ons onderwijs gaan doorvoeren. Ik geloof niet, dat dit gewenst is. Dat de verhouding van twee oppervlakten een affiene eigenschap is en de verhouding van de lengten van twee lijnstukken in het algemeen niet, enz., lijkt mij geen stof voor het V.W.O., al kan in vraagstukken wel eens iets dergelijks ter sprake gebracht worden. Wel zal men laten zien, dat alle voorgaande groepen, T, C_1, C, H en G, ondergroepen zijn van de affiene groep en dat dus alle eigenschappen van affiene figuren ook toekomen aan gelijkvormige, homothetische en congruente figuren.

Men krijgt een nog duidelijker inzicht, als men een voorbeeld gaat geven van een verzameling transformaties, die geen groep vormen, en een daarop gebaseerde relatie tussen twee figuren. Als voorbeeld zou ik willen geven de relatie symmetrisch. De verzameling van de *symmetrische transformaties* bestaat uit de congruente transformaties, die niet rechtstreeks congruent zijn, dus uit de verzameling $C \setminus C_1$ (de identiteit behoort hier dus niet toe).

Definitie. Als figuur F door een symmetrische transformatie in figuur F' over kan gaan, dan heet F *symmetrisch* met F'.

De verzameling van de symmetrische transformaties bevat de

[1]) Natuurlijk is het ook juist, dat bij een affiene transformatie een 'pijl' als beeld weer een 'pijl' heeft. Dit is echter geen onderdeel van de definitie, maar een gevolg ervan. Zodra een transformatie niet lineair is, zal een 'pijl' in het algemeen niet meer als beeld een 'pijl' hebben. Een puntenpaar geeft uiteraard wel weer een puntenpaar.

identiteit niet en de samenstelling van twee symmetrische transformaties geeft niet weer een symmetrische transformatie. Wel is de inverse van elke symmetrie weer een symmetrie. Dientengevolge is de relatie symmetrisch, niet reflexief en niet transitief.

Natuurlijk zal het van belang zijn erop te wijzen, dat voor groepen niet hoeft te gelden: $a \circ b = b \circ a$. Groepen, waarvoor dit geldt, heten abels. Bij elk van de vermelde groepen zal men allicht nagaan, of de groep abels is of niet.

Nu groepen hun bruikbaarheid bewezen hebben, zal het de moeite lonen er ook eens mee te gaan „spelen". Men krijgt aardige voorbeelden van eindige groepen door de groep van de transformaties te beschouwen, die een bepaalde figuur in zichzelf doen overgaan, b.v. een gelijkzijdige driehoek, een vierkant, een regelmatige zeshoek, een rechthoek. Men kan een tabel samenstellen (cayley-tabel), die aangeeft hoe de samenstelling van de transformaties plaats vindt. Men kan in deze tabel ondergroepen aanwijzen. Verder is een attractief voorbeeld van een groep de verzameling van de transformaties, die een bepaald oneindig zich herhalend ornament in zichzelf overvoert. Deze groepen zijn bij verschillende ornamenten soms sterk uiteenlopend. Ook bespreking van het werk van Esscher zal hier de belangstelling wekken.

Daarnaast ziet men de groep een rol spelen bij de permutaties. Van dit onderwerp kan men natuurlijk een geheel hoofdstuk maken, maar dat is nu juist niet de bedoeling. Essentieel zijn wel de cyclische permutaties.

Verder is het van belang een enkele stelling uit de groepentheorie af te leiden. Ik denk hier aan de stelling: in elke groep hebben de vergelijking $a \circ x = b$ en de vergelijking $x \circ a = b$ één wortel. Deze wortel is $a^{-1} \circ b$ resp. $b \circ a^{-1}$. In een abelse groep zijn deze wortels gelijk. Maar laat dit geen bron van vraagstukken worden, maar alleen een bron van inzicht, nl. het inzicht, dat een groep bepaalde eigenschappen heeft en dat dus overal, waar men een groep aantreft, ook deze eigenschappen zullen gelden. Er wordt daardoor op ongewilde wijze een tip van de sluier opgelicht, waarachter het belang van structuren in de wiskunde verborgen ligt.

Hetgeen nu volgt is niet voor alle leerlingen bestemd en zelfs m.i. niet voor alle B-leerlingen. Het lijkt mij van betekenis voor die B-leerlingen, die bij hun latere opleiding geregeld met wiskunde te maken zullen krijgen, zoals zij die wis- en natuurkunde of techniek gaan studeren. Voor hen zal het belangrijk zijn, dat ze enig dieper inzicht krijgen in de opbouw van de wiskunde. Ze zullen ermee gediend zijn, als nader wordt ingegaan op de eigenschappen van

groepen in het algemeen en op de betekenis van groepen in de algebra.

Voor hen zal het dus van belang zijn, als enkele stellingen uit de abstracte groepentheorie afgeleid en toegepast worden. Dit is stellig niet bedoeld als een bron voor vraagstukken. Het is alleen bedoeld om duidelijk te maken, dat eigenschappen van structuren overal, waar zo'n structuur optreedt, van kracht zijn. Het is niet noodzakelijk daartoe veel eigenschappen van groepen af te leiden. Men zou kunnen volstaan met een bescheiden aantal, b.v.

$$(a^{-1})^{-1} = a$$
$$ax = b \rightarrow x = a^{-1}b$$
$$xa = b \rightarrow x = ba^{-1}$$
$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$
$$a(bc)^{-1} = ac^{-1}b^{-1}$$
$$a(bc^{-1})^{-1} = a(c^{-1})^{-1}b^{-1} = acb^{-1}.$$

Voor abelse groepen laten zich nog enige vereenvoudigingen in deze formules aanbrengen.

We willen nu nagaan, hoe de kennis, die over groepen verkregen is, ons een duidelijker inzicht kan verschaffen in problemen, die zich voordoen bij de uitbreiding van het getalbegrip. Voordat we hiertoe overgaan, herinneren we eraan, dat we in het voorgaande enige keren een verzameling transformaties tegengekomen zijn, die geen groep vormden, zoals de rotaties en de vermenigvuldigingen. Samenstelling van twee rotaties gaf niet steeds weer een rotatie, samenstelling van twee vermenigvuldigingen niet steeds weer een vermenigvuldiging. Vandaar dat we de verzameling rotaties uitgebreid hebben met de translaties. Samen vormden deze wel een groep. En ook de verzameling vermenigvuldigingen hebben we uitgebreid met de translaties om tot een groep te komen. Conclusie: als een verzameling V t.o.v. van een operatie $\times$ geen groep vormt, doordat uit $a \in V$ en $b \in V$ niet altijd volgt $a \times b \in V$, dan kunnen we trachten V zó uit te breiden tot een verzameling V_1, dat $(V_1, \times)$ wel een groep is. Dit inzicht gaan we ons ten nutte maken bij het uitbreiden van getalsystemen.

We gaan uit van de natuurlijke getallen, waartoe we ook het getal 0 zullen rekenen. Door de bewerking optellen wordt aan elk paar natuurlijke getallen een natuurlijk getal toegevoegd. Vormen nu de natuurlijke getallen t.o.v. de bewerking optellen een groep? Er is een neutraal element, het getal 0; de optelling heeft de associatieve eigenschap. Maar niet elk natuurlijk getal heeft een inverse. Zelfs is 0 het enige natuurlijke getal, dat een inverse heeft. Willen

we hier tot een groep komen, dan zullen we de verzameling van de natuurlijke getallen dus moeten uitbreiden met nieuwe elementen, die de inversen zijn van de natuurlijke getallen die van 0 verschillen. Aan ieder dergelijk natuurlijk getal a voegen we daarom een nieuw getal a' toe zo, dat

$$a + a' = 0.$$

Zo ontstaat het systeem van de gehele getallen. We moeten nu binnen dit systeem leren rekenen en willen daarbij de eis stellen, dat de gehele getallen t.o.v. de optelling een abelse groep gaan vormen. Aan de hand van voorbeelden laten we zien, hoe we de optelling van gehele getallen moeten uitvoeren, als we aan deze eis willen voldoen:

$$5 + 3' = (2 + 3) + 3' = 2 + (3 + 3') = 2 + 0 = 2,$$
$$2' + 3' = (2 + 3)' = 5',$$
$$7' + 4 = (3' + 4') + 4 = 3' + (4' + 4) = 3'.$$

Men ziet, hoe de eis tot een groep te komen bepalend is voor de keuze van de definitie van de optelling in het systeem van de gehele getallen. Officieel moet men nu nog verder gaan en bewijzen, dat de zo gedefinieerde optelling de groepseigenschappen heeft, d.w.z. 0 als neutraal element heeft (hier is voor gezorgd) en associatief is (hetgeen wel niemand zal willen uitpuzzelen). Wel zal men nog willen verifiëren, dat elk geheel getal nu een inverse heeft. Dit is inderdaad het geval, omdat ook

$$a' + a = 0.$$

En dus vormen de gehele getallen een abelse groep.

Doordat we eigenschappen van groepen in het algemeen kennen, kunnen we nu zonder meer daaruit eigenschappen van de optelling van gehele getallen afleiden. Zo is nu

$(a')' = a$
$a + x = b \rightarrow x = a' + b$
$b - a = b + a'$ (waarin op de gebruikelijke manier de aftrekking als inverse bewerking van de optelling gedefinieerd is)

$$(a + b)' = b' + a' = a' + b'$$
$$a - (b + c) = a + (b + c)' = a + b' + c' = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a + (b + c')' = a + b' + c'' = a - b + c.$$

Zo komen we tot de groep (Z, +) van de gehele getallen. Er is echter een tweede bewerking, de vermenigvuldiging, en t.o.v. deze bewerking vormen de gehele getallen geen groep. We zonderen om

redenen, die bekend zijn en die ik hier niet opnieuw zal vermelden, het getal 0 uit en trachten Z aan te vullen tot een verzameling, die een abelse groep vormt t.o.v. de vermenigvuldiging. Daartoe voeren we nieuwe getallen a^* in zo, dat

$$a \cdot a^* = 1.$$

Het gaat hier niet even plezierig als in het vorige voorbeeld. Behalve deze nieuwe getallen moeten we ook nog beschikken over de getallen $b \cdot a^*$, waarin $b \in Z$. Deze getallen zijn niet alle verschillend. Ik wil dit niet in details doornemen, omdat het ieder toch wel bekend is. Liever wil ik erop wijzen, dat nu eerst recht duidelijk het voordeel blijkt van het gebruik van structuren. Dezelfde groepseigenschappen, die hierboven eigenschappen van de optelling en aftrekking in Z gaven, geven nu eigenschappen van de vermenigvuldiging en deling in het systeem van de rationale getallen, nl.

$(a^*)^* = a$
$a \cdot x = b \rightarrow x = a^* \cdot b$
$b : a = b \cdot a^*$ (waarin op de gebruikelijke manier de deling als inverse bewerking van de vermenigvuldiging gedefinieerd is)
$(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^* = a^* \cdot b^*$
$a : (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c)^* = a \cdot b^* \cdot c^* = a : b : c$
$a : (b : c) = a \cdot (b \cdot c^*)^* = a \cdot b^* \cdot c^{**} = (a : b) \cdot c.$

Natuurlijk komt er meer kijken bij de uitbreiding van het getalbegrip. Zo zal bij de definitie van de vermenigvuldiging van gehele getallen de eis, dat de distributieve eigenschap haar geldigheid niet verliest, een rol gaan spelen. Maar ik heb niet willen vertellen, hoe de structuur van het getalbegrip nader onderzocht kan worden, maar alleen wat de rol van de groepentheorie hier kan zijn. Al zou men er geen prijs op stellen de opbouw van het getalsysteem nader te analyseren, hetgeen ik stellig te verdedigen acht, dan nog zou het van belang zijn te constateren:

a. voor groepen gelden de hierboven genoemde eigenschappen,

b. de gehele getallen vormen een groep t.o.v. de optelling en de rationale (zonder 0) t.o.v. de vermenigvuldiging,

c. dientengevolge gelden de hierboven genoemde eigenschappen van de optelling (en aftrekking) en van de vermenigvuldiging (en deling),

d. een gevolg hiervan is, dat uit eigenschappen van optelling en aftrekking door 'vertaling' eigenschappen van vermenigvuldiging en deling afgeleid kunnen worden.

Van de in het begin genoemde vier structuren is nog geen aandacht

geschonken aan de lineaire ruimte. Het is ook niet mijn bedoeling hier nader op in te gaan. Terloops zijn we al een lineaire ruimte tegengekomen, namelijk de lineaire ruimte van de translaties met de bewerkingen optelling en scalaire vermenigvuldiging. Ook de geordende puntenparen met vast beginpunt vormden een lineaire ruimte, maar deze levert weinig nieuws, want hij is isomorf met de ruimte van de translaties. Bestudering van lineaire ruimten is zonder twijfel zinvol voor diegenen, die later met wiskunde te maken krijgen. Bovendien kan bestudering van de euclidische driedimensionale ruimte geschieden met behulp van de methode der lineaire algebra, waardoor systematisch stereometrie-onderwijs geheel of gedeeltelijk overbodig wordt. Meer wil ik er hier niet van zeggen. Alleen wil ik nog opmerken, dat nu reeds blijkt, dat de gegeven omschrijving van een structuur ontoereikend is: bij de lineaire ruimte is sprake van een operatie, de scalaire vermenigvuldiging, die aan een paar, bestaande uit een reëel getal en een vector, een vector toevoegt. De omschrijving diende dan ook alleen ter oriëntatie.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien ze binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, John de Wittlaan 14, Hoogezand.

TELEC

In de cursus "*Moderne Onderwijsmethoden en Didactiek*" op woensdag 19 mei 1965 via het televisienet van 22.40 — 23.10 uur (met herhaling op zaterdag 22 mei om 10.30 uur) Drs. W. Brandenburg: *Modern Wiskundeonderwijs.*

DE NORMAALVERGELIJKING

door

P. Wijdenes

Amsterdam

In de schoolboeken, die ik heb over analytische meetkunde, het mijne inbegrepen, wordt (op één na, dat van Keizer) de vergelijking $x \cos \alpha + y \sin \alpha - n = 0$ afgeleid en de lengte van de loodlijn uit $(x_1; y_1)$ op $ax + by + c = 0$ berekend; niet eenvoudig. Het eerste is geheel overbodig; het tweede kan veel korter; zie maar.

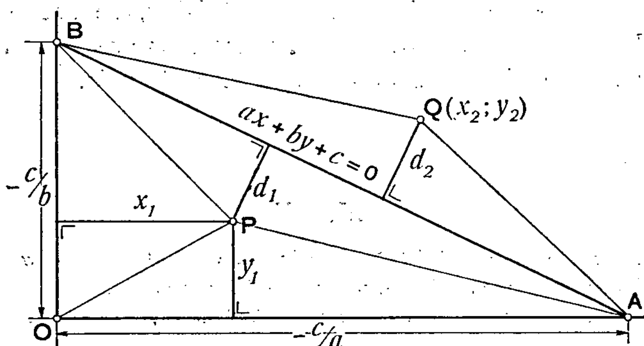


Fig. 1.

De schuine zijde van de rechthoekige driehoek OAB is $\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{b^2}} = \dfrac{c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Opp. $\triangle PAB$ + opp. $\triangle POB$ + opp. $\triangle POA$ = opp. $\triangle OAB$.

Neem deze oppervlakte tweemaal en druk ze uit in x_1, y_1, a, b en c. We vinden

$$d_1 \times \frac{c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2} + x_1 \times -\frac{c}{b} + y_1 \times -\frac{c}{a} = -\frac{c}{a} \times -\frac{c}{b} = \frac{c^2}{ab}.$$

Vermenigvuldig alle termen met ab/c; na overbrenging van twee termen uit het 1e lid naar het tweede lid komt er

$$d_1\sqrt{a^2 + b^2} = ax_1 + by_1 + c \text{ dus}$$

$$d_1 = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (1)$$

a en b kunnen deze tekens hebben: $+ +$; $+ -$; $- +$; $- -$; daar er in de eindvorm $a^2 + b^2$ voorkomt, geldt de afleiding voor lijnen in alle vier kwadranten.

Nu nemen we de normaal steeds positief, in welk kwadrant hij ook ligt, daartoe is nodig, dat we c positief nemen; we vinden dan

$$n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ (c \text{ pos.}) \qquad (2)$$

Voor Q aan de andere kant van AB hebben we

$$-\triangle QAB + \triangle QOB + \triangle QOA = \triangle OAB, \text{ dus}$$

$$d_2 = -\frac{ax_2 + by_2 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (3)$$

De normaalvorm van de algemene vergelijking $ax + by + c = 0$ is $\dfrac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$ (c pos.), omdat men voor inzetting van $a = 0$ en $b = 0$ de lengte van de normaal vindt.

De hele theorie over de afstand van een punt tot een lijn is het boven aangestreepte met dan de formules (2) en (3), die er direct uit volgen.

Geen herleiding van $ax + by + c = 0$ tot $x \cos \alpha + y \sin \alpha - n = 0$, geen modulusstreepjes, geen $\pm$, geen $\mp$, niet twee formules, niet $-\sqrt{a^2 + b^2}$, geen sin noch cos.

Ziehier een voorbeeld met nog wat erbij:
l op fig. 2 heeft de vergelijking $3x + 4y - 24 = 0$; voor ons doel $-3x - 4y + 24 = 0$; de normaal n is lang $24 : 5 = 4{,}8$; de lood-

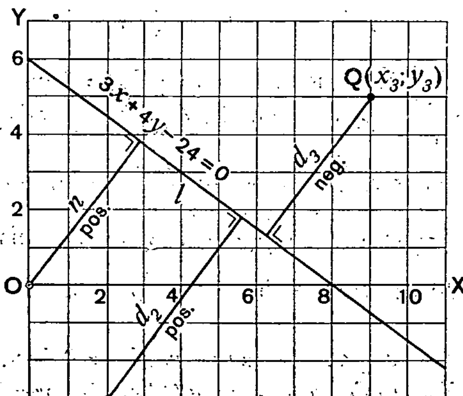


Fig. 2.

lijn uit $P(2;\,-3)$ is $d_2 = \dfrac{(-3)\times 2 - 4\times(-3)+24}{5} = 6$; die uit $Q(9;\,5)$ is $d_3 = \dfrac{-3\times 9 - 4\times 5 + 24}{5} = -4{,}6$.

Het hele vlak heeft drie gebieden: de punten $(x_1;\,y_1)$, die $ax+by+c$ nul maken; deze vormen de lijn l met de vergelijking $ax+by+c=0$; dan de punten van het halve vlak, waarin O ligt; inzetting van $(x_2;\,y_2)$, gelegen in dit gebied, maakt $ax+by+c>0$; en dan $(x_3;\,y_3)$ in het andere halve vlak, die $ax+by+c<0$ maakt.

In de zes schoolboeken over analytische meetkunde, het mijne inbegrepen, wordt $x\cos\delta + y\sin\delta - n = 0$ afgeleid en behandeld in $\frac{1}{2}$ bladzijde tot 4 bladzijden. In de grote boeken van prof. Barrau en prof. Rutgers op zijn hoogst één bladzijde, evenredig aan het wel zeer geringe belang ervan. Immers *in alle boeken is de verschijning meteen de verdwijning*; in geen enkel boek duikt de normaalvergelijking met $\cos\delta$ en $\sin\delta$ meer op. Er zijn ook geen vraagstukken, waarbij het gebruik ervan maar enig gemak geeft; integendeel.

Met het bovenstaande is het mogelijk, de vergelijkingen van de deellijnen van hoeken *juist* aan te geven. Niet zo:

1. De lijnen $y = 3x + 1$ en $x + 3y = 5$ vormen vier hoeken; de vergelijkingen van de deellijnen zijn $\dfrac{y-3x-1}{\sqrt{10}} = \pm\dfrac{x+3y-5}{\sqrt{10}}$ of $2x+y=2$ en $2y-x=3$.

2. De bissectrices der hoeken gevormd door de lijnen $2x+y=4$ en $3x-y=5$ worden voorgesteld door

$$\frac{2x+y-4}{\sqrt{5}} = \pm\frac{3x-y-5}{\sqrt{10}}.$$

3. De bissectrices van de hoeken tussen $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$ zijn de rechten $L_1 = \pm L_2$ ($L_1 = 0$ en $L_2 = 0$ zijn hierbij in normaalvorm geschreven).

4. De bissectrices van de lijnen $4x-3y=10$ en $6x-8y=1$ zijn $\dfrac{4x-3y-10}{5} = \pm\dfrac{6x-8y-1}{10}$. De ene biss. is de lijn $2x+2y=19$, de andere de lijn $2x-2y=3$.

Het behoort zo: *als l_1 de normaalvorm $N_1 = 0$ heeft en l_2 $N_2 = 0$, dan heeft de deellijn van de hoek, waarin O ligt, de vorm $N_1 - N_2 = 0$; de andere is dan $N_1 + N_2 = 0$.* Onder $N_1 = 0$ verstaan we dan

$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$ (*c* pos.) en onder $N_2 = 0$ dan $\frac{px + qy + r}{\sqrt{p^2 + q^2}} = 0$ (*r* pos). Omdat de loodlijnen uit *O* op beide lijnen van fig. 3 positief zijn, zijn de loodlijnen uit enig punt van de deellijn in het gestreepte gebied gelijk en positief; in de overstaande hoek beide negatief; $N_1 - N_2 = 0$ is dus de vergelijking van de deellijn van de hoek, waarin *O* ligt; de deellijn van de hoek, waarin *O* niet ligt, is $N_1 + N_2 = 0$.

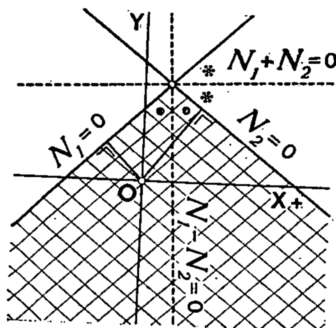


Fig. 3.

Even een toepassing: de zijden van de driehoek $A_1A_2A_3$ hebben tot normaalvergelijkingen $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ en $N_3 = 0$; *O* binnen de driehoek. De deellijn van $\angle A_3$ van de driehoek heeft de vergelijking $N_1 - N_2 = 0$, die van $\angle A_1$ $N_2 - N_3 = 0$, die van $\angle A_2$ $N_3 - N_1 = 0$; deze gaat door het snijpunt *O* van de eerste twee; immers $(N_1 - N_2) - (N_2 - N_3) = N_3 - N_1 = 0$.

Het verschil van de normaalvergelijkingen van de buitenhoeken bij A_3 en A_1 is $(N_1 + N_2) - (N_2 + N_3) = 0$, dat is $N_1 - N_3 = 0$, de deellijn van $\angle A_2$. We gaan ook het geval na, dat de lijn door *O* gaat; in geen van de boeken, het mijne inbegrepen, wordt er de aandacht op gevestigd; hoeft ook niet in een schoolboek m.i.; maar de lezers van dit artikel hebben er recht op.

We kunnen een positieve kant kiezen; hoe? De vergelijking $ax + by = 0$ nemen we *met positieve a*; dus $4x - 3y = 0$ en $3x + 4y = 0$; zie de figuren 4 en 5. De loodlijn uit $P(2; 0)$ is $\frac{4.2}{5} = 1{,}6$; die uit Q $\frac{3.2}{5} = 1{,}2$; meet ze maar na. *Het positieve gebied is dat halve vlak, waarin zich het positieve deel van de X-as bevindt.* Neem op fig. 4 maar eens de loodlijn uit $(3; -2)$; er komt uit $\frac{4 \times 3 - 3 \times -2}{5} = 3{,}6$;

uit $(-2; +2)$ is de loodlijn $\frac{4 \times -2 - 3 \times 2}{5} = -2{,}8$. Op fig. 5 uit $(-1; 3)$ $\frac{3 \times -1 + 4 \times 3}{5} = 1{,}8$; uit $(-2; -3)$ is de loodlijn $\frac{3 \times -2 + 4 \times -3}{5} = -3{,}6$.

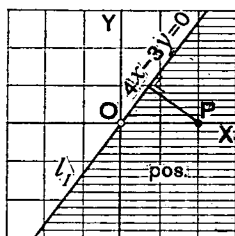


Fig. 4.

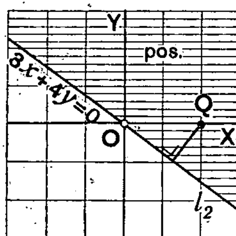


Fig. 5.

De deellijn van de hoek van twee lijnen, die door O gaan en waarin OX_+ zich bevindt, heeft de vergelijking $N_1 - N_2 = 0$; hierin zijn $N_1 = 0$ en $N_2 = 0$ de normaalvergelijkingen van lijnen $ax + by = 0$, waarvan a positief is.

Tot slot dit: *op school alleen de normaalvorm behandelen als het aangestreepte aangeeft met de formules* 1, 2 *en* 3; *van het volgende alleen* $N_1 - N_2 = 0$ en $N_1 + N_2 = 0$.

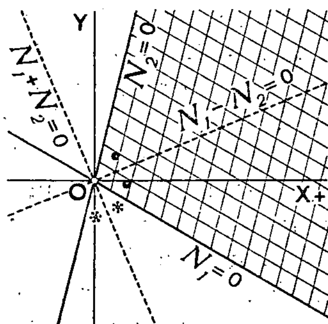


Fig. 6.

$x \cos \alpha + y \sin \alpha - n = 0$ is overbodig; maakt alleen makkelijkheden moeilijk. Ik hoop, dat de schrijvers van schoolboeken over analytische meetkunde er rekening mee houden.

KORREL CXXVII
(Factorstelling in de goniometrie?)

Zelfs al ziet men op het eerste gezicht, dat de breuk $\dfrac{\sin 3x}{\sin(x + 60°)}$ te vereenvoudigen is, dan is toch nog wat gereken nodig om de uitkomst te krijgen. Als $f(x)$ en $g(x)$ veeltermen zijn, dan is de breuk $f(x) : g(x)$ te vereenvoudigen, als de functies een nulpunt gemeen hebben. Proberen we dit in ons geval, dan zien we, dat inderdaad de nulpunten van de noemer een deelverzameling vormen van die van de teller. De resterende nulpunten zijn $k \,.\, 180°$ en $60° + k \,.\, 180°$ dat zijn de nulpunten van resp. $\sin x$ en $\sin(x + 120°)$.
Naar analogie van de factorstelling schrijven we:
$\sin 3x = c \sin x \sin(x + 60°) \sin(x + 120°)$; $x = 30°$ geeft dan nog $c = 4$. De functies rechts en links hebben nu dezelfde nulpunten, maar zijn ze ook identiek? Door gewoon narekenen kunnen de leerlingen dat bevestigen. Uit een bekende stelling van de functietheorie volgt het meteen; immers de analytische functie

$$f(z) = \frac{\sin 3z}{\sin z \sin\left(z + \dfrac{\pi}{3}\right) \sin\left(z + \dfrac{2\pi}{3}\right)}$$

heeft geen polen en blijft eindig als z naar oneindig gaat. Dus is $f(z)$ een constante. Op deze wijze kan nog van allerlei gedaan worden: $\sin 2x$; nulpunten $k \,.\, 90°$; dus dezelfde als van $\sin x \,.\, \cos x$. Dus $\sin 2x = c \sin x \cos x$. De nulpunten van $\cos 2x$ zijn $45° + k \,.\, 90°$; dus dezelfde nulpunten als $(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$. Ook de bekende formule voor $\sin 3x$ volgt op deze manier:
$\sin x\,(\sin x - \frac{1}{2}\sqrt{3})\,(\sin x + \frac{1}{2}\sqrt{3})$ dezelfde nulpunten. Inderdaad $\sin 3x = c \sin x\,(\sin^2 x - \frac{3}{4})$.
Algemeen: $\sin nx = c_n \prod_{k=0}^{n-1} \sin(x + k/n \,.\, 180°)$. Men bewijst b.v. zo ook direct dat $\cos nx$ deelbaar is door $\cos x$, als n oneven is.

Ook nog: $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} x \operatorname{tg}(x + 60°) \operatorname{tg}(x + 120°)$, waarbij moet worden opgemerkt, dat de functies links en rechts dezelfde *polen* hebben. Voor de leerlingen lijkt mij het bovenstaande van belang omdat ze allereerst een onvermoede toepassing zien op ander gebied, een toepassing, die ze niet algemeen kunnen bewijzen. Maar dit is nu juist zo vaak in de geschiedenis der wiskunde het geval, dat een „VERMOEDEN" eerst veel later bewezen is, . . . en nog vaak bewezen *moet worden*.

P. Bronkhorst

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

1. *Mathematica et Paedagogia* (IX, 26; 1964).

Henri Janne, Une journée décisive;
L. Bouckaert, De integraalrekening in het middelbaar onderwijs;
J. Dieudonné, Les mathématiques modernes et l'enseignement secondaire;
Z. Grygowska, Sur la nécessité d'une conception pédagogique dans la réforme de l'enseignement des mathématiques;
G. Walusinski, La réforme en acte;
A. Festraets, La continuité;
P. Debbaut, Une expérience en seconde scientifique;
H. Angenot, Equations de droites en quatrième.

2. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (XLIII, 240, juillet 1964).

A. Donedu, Mesure des angles;
S. Thierus, Que peut-on enseigner aux élèves de l'ensemble %?
J. Delassus, Fractions et fonctions rationelles en troisième;
R. Esteve, A propos d'un livre nouveau et de questions d'extremum sur le tétraèdre;
D. Lacombe, Les mots et les symboles;
M. A. Touyarot et F. Brachet, Manipulations sur la numération en classe de Cinquième.
In dit nummer verdient een bibliografie van moderne didactische literatuur de aandacht van de lezer; we treffen werken aan van Fletcher, Castelnuovo, Choquet, Papy, Dieudonné, Gattegno, Milaret, Irving Adler en anderen.

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (XLIV, 241, octobre 1964).

P. Couderc, Galilée et la pensée contemporaine;
P. Rosenstiehl, Algèbre et probabilité;
M. Frechet, L'évolution permanente de la pédagogie des mathématiques;
S. Straszwicz, Sur un problème géométrique de P. Erdös;
D. Lacombé, Les mots et les symboles;
M. Lefur, Sur l'étude des fonctions;
F. Grenier, Sur le double produit vectoriel;
G. Walusinski, Organiser un cours de Mathélem;
G. M. Barbins, Idéogrammes;
Le chasseur de pommes, Calcul linéaire et problèmes de la vie courante.

Nummer 242 van het Bulletin is geheel gewijd aan „la vie de l'Association" naar aanleiding van de „Journées d'études de l'A.P.M. à Lyon". De nummers 243, 244 en 245 bevatten de opgaven van het Baccalauréat 1964, nummer 246 die van het Propédeutique 1964.

3. *Praxis der Mathematik* (VI, 8, August 1964; 9, September 1964).

K. Apfelbacher, Methodisches zur Umkehrfunktion;
H. Ahbe, Zur Stoffauswahl für die Methodische Arbeitsgemeinschaft;
Kl. Wigand, Erste niederländische Mathematik-Olympiade;
O. Becker, Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden, IV; Die Köningskammer der Cheops-pyramide;
P. Dallmann, Zum Funktionsbegriff;
K. H. Hürten, Maximale Wurfweite;
P. Krauns, Ein Unterrichtsversuch zur Linearplanung;
W. Ness, Noch einmal Kombinatorik;
Kl. Wigand, Einführung in die Mengenalgebra programmiert.

Praxis der Mathematik (VI, 10, Oktober 1964).

W. Krücken, Relationen und Funktionen;
H. Lindner, Braucht die Schule Lehrmaschinen?
O. Klein, Zur Fläche des Hyperbelsegmentes;
W. Eichel, Abbildungsgeometrischer Beweis des „Affinpythagoras";
H. Coehsmeyer, Teilungslinien im Dreieck;
Th. Zech, Die Summe der ersten n Quadratzahlen;
K. Mütz, Winkel am Kreis.

Praxis der Mathematik (VI, 11, November 1964; 12, Dezember 1964).

W. L. Fisher, 30 Jahre Bourbaki;
F. H. H. Thiesemann, Zur Systematik der Vierecke;
K. Kemmler, Lösung algebraischer Gleichungen durch rekurrente Folgen;
W. Ness, Das arithmetische und das geometrische Mittel;
Kl. Wigand, Oben und unten (vertaling van een artikel in nummer 2 van de tweede jaargang van „Pythagoras");
H. Scharff, Ein Schwerpunktsatz für Vierecke;
K. H. Hürten, Methodisches zur Umkehrfunktion;
U. Troltenier, Rechnen und Rechnenmaschinen in der chemischen Industrie.

Praxis der Mathemathik (VII, 1, Januar 1965; 2, Februar 1965; 3, März, 1965).

G. Steller, Matrizen im Unterricht;
Fr. Barth, Ein Weg zur Exponentialfunktion;
H. Spiess, Ganze Zahlen in Quinta;
L. Lienle, Definitionsfunktionen physikalischer Masszahlen;
J. E. Hofmann, Mathematikgeschichtliches Kolloquium in Oberwolfach;
H. Kemper, Umgang mit Zahlen im Unterricht;
H. Töpfer, Ein Vorschlag zur Bezeichnung von Zahlenmengen;
S. Filippi, Ein modernes Quadraturverfahren;
H. Rixecker, Potentialberechnung durch Grenzübergang;
Kl. Wigand, Mathematische Wettbewerbe.

4. *Elemente der Mathematik* (XIX, 4, Juli 1964; 5, September 1964).

H. Zeitler, Eine reguläre Horozyklenüberdeckung der hyperbolischen Ebene im Poincaré-Modell;
J. Mall, Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie aus dem allgemeinen Poincaré-Modell;
A. Rotkiewicz, Sur les nombres pseudopremiers triangulaires;
W. Jäninchen, Über ein Tetraederproblem;
G. R. Veldkamp, Note on a paper by J. Steinig;
E. Stiefel, Die Renaissance der Himmelsmechanik;
W. Sierpinski, Sur les nombres $a^n + 1$;
D. W. Robinson, A note on the order of an element in a ring;
J. Schopp, Über die n-dimensionalen Axonometrien;
O. Baier, Ein Beweis des Pascalschen Satzes.

Elemente der Mathematik (XIX, 6, November 1964; XX, 1, Januar 1965).

A. Mostowski, Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese;
H. Guggenheimer, Ein Axiomensystem für die euklidische Geometrie;
F. Leuenberger, Notiz zu einem System von Grössenrelationen im Dreieck;
H. J. Vollrath, Zum Zusammenhang zwischen dem Satz vom g.g.T. und dem ZPE-Satz;
O. Bottema, Ein Schliessungssatz für zwei Kreise;
O. Reutter, Über Pseudoprimzahlen;
K. Selucky, Über die Primzahlwerte der Funktion $x^2 + x + 1$;
E. Schröder, Beitrag zur Geometrie der Bienenzelle;
I. Paasche, Transversalsätze und Dreieckskoordinaten.

5. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XVII, 4, 5, 6, September; Oktober, November 1964).

F. Bachmann und H. Wolff, Über die Parallelenfrage;
W. F. Schmidt, Ein Demonstrationsmodell zur Fouriersynthese;
H. v. Sanden, Eine wenig bekannte Parabelkonstruktion;
W. Ness, Pythagoreische Zahlentripel;
J. Grehn und G. Harbeck, Bericht über die 30. Tagung zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule in Münster;
H. G. Steiner, Menge und Struktur als Leitlinie für den Mathematischen Unterricht;
W. Müller, Über die Teilbarkeit einer Zahl durch 11;
F. Ostermann, Über die Frequenzen eines Federpendels;
O. Höfling, Elementarteilchen.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XVII, 7—10; Dezember 1964 – März 1965).

H. Lindner, Der Standort der Programmierten Unterricht im Gymnasium;
R. Leupold u.a., Erste Erfahrungen mit Programmiertem Unterricht;
F. Reutler, Neuere Methoden und Ergebnisse der Nomographie;
H. Noack und J. Grehn, Arbeitstagung für Mathematik und Physik in Kiel;
M. Kersten, Vom Bildungswert der Naturwissenschaften in der höhere Schule;
Fr. Mutscheller, Die Auswirkung der Saarbrückener Rahmenvereinbarung in der Schulpraxis;
H. Besuden, „Verallgemeinerung" und „Sonderfall" bei den Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck;
R. Wölz, Ein Vorschlag zur Behandlung der Zentral-kollineation;
H. Behnke, Vorschläge zur Reform des Studiums für das höhere Lehramt;
F. Moeller, Formalzeichen in Naturwissenschaft und Technik;
H. Blum, Dualsystem, Schaltalgebra und elektronisches Rechnen;
H. Noack, Zur Einführung algebraischer Strukturen auf der Mittelstufe.

6. *School Science and Mathematics* (LXIV, 7—9, 567—569; LXV, 1; 570; October 1964 – January 1965).

C. B. Read, When did Diophantoss live?
Ch. W. Trigg, A timeless happenstance;
N. E. Thompson, A realistic approach to computers in high school;
A. L. Bernstein, Motivations in mathematics;
C. C. Read, Did the Hebrew use 3 as a value for π?
A. R. Amir-Moez, Intuition and mathematics;
W. R. Ransom, Curious factoring;
D. Rappoport, Historical factors that have influenced the mathematics program for the primary school;
P. C. Burns, Analytical testing and follow-up experiences in elementary school mathematics;
E. Chastain, Objectives of experimental courses in elementary mathematics;
W. A. Gager, Computing with approximate data.
Whole 570 bevat verder een opgave van een tweehonderd summerinstitutes waaraan in 1965 wiskunde gedoceerd zal worden.

7. *The Mathematics Teacher* (LVII, 6—7; October 1964, November 1964).

Fr. B. Allen, The Council's drive to improve mathematics - a progress report;
R. L. Morton, Pascal's triangle and powers of 11;
B. R. Lane, An experiment with programmed instruction as a supplement to teaching college mathematics by close-circuit television;
J. P. Becker, On solutions of geometrical constructions utilizing the compasses only;
H. Sitomer, Coordinate geometry with an affine approach;
L. Guggenbuhl, The New York fragments of the Rhind Mathematical papyrus;
H. P. Fawcett, Reflections of a retiring teacher of mathematics;
W. W. Maiers, Introduction to non-Euclidean geometry;
K. E. Easterday, An experiment with low achievers in arithmetic;

R. Hailpern, The link method in trigonometry;
S. Kaner, Discovering the centroid of a quadrilateral by construction;
Ch. L. Smith, On the origin „>" and „<";
J. L. Jordy, A comparative study of methods of teaching plane geometry.

The Mathematics Teacher (LVII, 8 December 1964; LVIII, 1; January 1965).

P. C. Hammer, The role and nature of mathematics;
S. Greenholz, What's new in teaching slow learners in junior high school?
L. E. Pursell, Approximating division by a sequence of bisections;
J. A. Bradley, Some remarks concerning formulaes of circles and radical axis;
H. E. Williams, A demonstration of indeterminate forms using finite methods;
M. Constantia, Dr. Hopkins' proof of the angle bisector problem;
N. A. Draim, Spinning out the square root of an integer;
R. J. Gillings, The volume of a truncated pyramide in ancient Egyptian papyri;
I. C. Peden, The missing half of our technical potential: can we motivate the girls?
I. A. Barnett, Introducing number theory in high school algebra and geometry;
M. Perry, Dabar, logos and shh;
Th. H. Slook, Integers which are differences of squares;
H. F. Fehr, Reform of mathematics education around the world;
C. B. Boyer, Johann Hudde and space coordinates;
Fr. Wright, Motivating students with projects and teaching aids;
W. Topoly, An introduction to solving problems.

8. *The mathematical Gazette* (XLVII, 364, May 1964).

Herdenkingsartikel prof. dr. E. H. Neville;
J. E. Littlewood, „Back to 1941";
L. Carlitz, Some inequalities for a triangle;
R. W. Calvert, Geometry and soap bubbles;
G. Garrett, Visit to a Moscow school (1963).

The Mathematical Gazette (XLVIII, 366; December 1964).

A. R. Tammadge, Stage A topology in the main school;
T. A. A. Broadbent, George Boole (1815—1864);
W. G. Bickley, Mathematics for engineering students;
S. N. Collings, Maximum length decimals;
Margret Jackson, On cubic equations whose roots are all distinct;
J. H. Cadwell, Some dissection problems involving sums of cubes;
P. Liebeck, The construction of flexagons;
S. W. Golomb, Replicating figures in the plane;
A. W. F. Edwards, Infinite coprime sequences.

BOEKBESPREKING

Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, tweede druk 270 blz., 1964; gebonden; McGraw-Hill Book Company, New York - London.

Dit welverzorgde, moderne leerboek der analyse maakt deel uit van een „international series in pure and applied mathematics". Het behandelt op universitair niveau de systemen van de reële en van de complexe getallen, de beginselen van de verzamelingsleer, de differentiaalrekening, de theorie van de Riemann-Stieltjes integraal en van de Lebesgue-integraal, metrische ruimten en lineaire transformaties.

Het boek, dat uitmunt door heldere betoogtrant en exacte behandelingswijze, bevat een paar honderd deels van aanwijzingen voor de oplossing voorziene opgaven, en een literatuurlijst met verwijzingen naar klassieke en moderne werken van grotere omvang, en besluit met een uitvoerig register.

Joh. H. Wansink

Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear Operators*, part II, Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space, Interscience Publishers, New York, London 1963. (second printing 1964), 265/-.

Dit tweede deel, in 1958 aangekondigd bij de uitgave van het eerste deel, begint op pagina 859 en eindigt op pagina 1923. Maar reeds wordt een derde deel aangekondigd. Na deel I „*General Theory*" straks deel III „*Spectral Operators*", In het kader van dit tijdschrift is het niet mogelijk op de overstelpende hoeveelheid materiaal in te gaan, die hier te zamen werd gebracht, de literatuurlijst beslaat in dit deel een honderdtal pagina's.

Laat ik in enkele woorden trachten de hoofdthema's van dit standaardwerk op het gebied van de functionaalanalyse aan te geven. Allereerst beperkte normale operatoren in de Hilbertruimte (voorbeelden onder andere de bijna periodieke functies op compacte groepen en de theorie van de Hilbert-Schmidt operatoren). En in de tweede plaats de onbeperkte operatoren. Daar de differentiatie een voorbeeld van een onbeperkte operator is, vinden we hier als belangrijke voorbeelden de lineaire gewone en partiële differentiaal-operatoren.

Naast een uitvoerige presentatie van de algemene theorie is ook aandacht gegeven aan voorbeelden, waaronder vele uit de klassieke analyse, en „notes and remarks" o.a. met overzichten van literatuur over en geschiedenis van het in het betreffende hoofdstuk behandelde.

F. van der Blij

Dr. M. Euwe, *Kunnen computers denken?* oratie 29 oktober 1964, Tilburg, 23 blz. P. Noordhoff, Groningen.

Deze belangrijke, boeiende oratie verdient ons aller belangstelling. Spr. begint met de opmerking dat, als we een computer iets vragen, een minutieuze bijna pijnlijk duidelijke formulering een absolute vereiste is.

Het antwoord op de vraag in de titel van de oratie gesteld hangt in hoge mate af van de opvattingen die we over „denken" hebben. Wanneer we alleen maar oog hebben voor de resultaten en niet voor het denkproces zelf, dan is het boven alle twijfel verheven, dat de computer tot denken in staat is. De computer kan tal van denktaken van de mens op zijn eigen hoekige, omslachtige en niettemin snelle wijze tot een correct resultaat brengen. Beperken we ons echter niet tot het rationalistisch denken, maar betrekken we het totale menselijke denken in onze beschouwingen, dan blijkt simulatie van het denkproces door de computer volkomen uitgesloten. Het menselijk denkproces heeft zovele ongrijpbare aspecten en zoveel dimensies, dat het zich aan een natuurgetrouwe simulatie door de computer ontrekt.

Spr. komt tot deze conclusie op grond van een kritische analyse van bestaande opvattingen en verrichte experimenten, waarbij zijn antwoord op de nevenvraag of computers kunnen schaken, van belang blijkt.

Joh. H. Wansink

Robert D. Larsson, *Equalities and approximations* (*with Fortran programming*). John Wiley and Sons, New York 1963, 158 bladzijden, prijs 42/—

Dit boek is bedoeld voor leerlingen van de Amerikaanse high-school. Het is echter geen leerboek, waarin op traditionele wijze traditionele stof wordt behandeld, maar het is de handleiding bij een zogenaamde „enrichment course". Dit betekent,

dat het mikt op een verbreding en verdieping van de wiskundige kennis der studenten (waaraan dan kennelijk een ruime hoeveelheid tijd besteed kan worden naast het gewone, verplichte programma).

Uit een selectie van de in dit boek behandelde begrippen blijkt al meteen langs welke weg die verrijking gezocht wordt: achtereenvolgens komen groepen, matrices, ringen, integriteitsgebieden, lichamen in bespreking. Al die onderwerpen worden van het centrale gezichtspunt van het oplossen van vergelijkingen uit behandeld, zonder diepgaande en abstracte theoretische beschouwingen en voor de leerlingen, naar ik aanneem, op een duidelijke en begrijpbare manier.

In het tweede deel van het boek komen dan ook ongelijkheden aan de beurt en benaderingen. Hieronder valt een bespreking van de benadering van oppervlakten, die als voorbereiding van de integraalrekening opgezet is. Bovendien wordt ook een studie gemaakt van benaderings-polynomen (Lagrange), die natuurlijk ook niet erg diep gaat.

Het is een bijzonder fris idee geweest, om de behandeling van al deze onderwerpen te doen vergezellen door een bespreking van Fortran (een afkorting van formula translation). Deze programmeertaal voor computers is eenvoudig, snel te leren, overzichtelijk, sterk verwant met de door ons dagelijks gebruikte algebrataal. In de tekst worden allerlei problemen opgelost en geprogrammeerd, zodat een computer het benodigde cijferwerk zou kunnen uitvoeren. Bij elk onderwerp staan vraagstukken, waarin van de lezer zelf gevraagd wordt zulke programma's te schrijven. Daar steekt dan de gedachte achter, dat men daar pas in slaagt, wanneer men de behandelde leerstof volledig doorgrond heeft. Probeert men zulk een programma te schrijven, voor men de benodigde hoeveelheid kennis vergaard en verwerkt heeft, dan wordt men door de optredende moeilijkheden vanzelf wel gewaar, waar de leemten in die kennis schuilen.

Dit boek zal u, collega, niet veel nieuws leren. Maar wanneer u eens een keer over veel tijd gaat beschikken, die u naar eigen inzichten met uw leerlingen kunt besteden, dan vindt u er wellicht enkele aardige ideeën in.

A. van Tooren

Dr. P. M. van Hiele en Dr. D. van Hiele-Geldof, *Van figuren naar begrippen* **3**, Muusses, 1963. Prijs niet vermeld.

De waardering, die ik voor deel I en deel II van dit boek had, kan ik onveranderd voor deel III opbrengen (zie Euclides 39e jaargang p. 284). En de door mij geplaatste vraagtekens plaats ik weer. Veel waardering dus en veel vraagtekens.

In het begin van dit boek zie ik onopvallend staan – in deel I en deel II was het mij ontgaan – „Volledige leergang voor scholen, waar zelfstandig werken en denken hoofdzaak is". Dat pretendeert nogal wat. Elke docent, die niet uit de pas wil lopen, zegt dan, dat hij erbij moet zijn. Je kunt toch voor je fatsoen niet zeggen dat je de waarde van zelfstandig werken en denken niet zo bar hoog aanslaat! De auteurs dwingen ons met deze aankondiging wel om van hun werk kennis te nemen. Dat wil ik graag en niet alleen vanwege het fatsoen. Een tweede hoofdzaak zou ik er echt wel aan willen toevoegen. Is het ook geen hoofdzaak, dat de leerling een heel klein beetje liefde voor het vak gaat voelen, dat er ambitie voor „het vraagstuk" wordt gekweekt? En is het geen hoofdzaak dat de natuurlijke drang zich te meten met iets of met iemand, wordt omgebogen naar de drang zich te meten met niet op een rij gezette opdrachten, ontleend aan het machtige spel, dat meetkunde heet? De auteurs en ik verschillen wellicht van mening over de inhoud van dat spel. Mogelijk interesseren zij zich het meest voor de bereiding van de gerechten, die de

wiskundige kok opdient; mij laten die gerechten zelf niet geheel onverschillig. Ik zie zo veel methode en betrekkelijk weinig resultaat; zo weinig verrassende resultaten uit het gebied der driehoeksmeetkunde. Het is in de moderne meetkunde schrappen geblazen; de meetkunde van de school wordt hoe langer hoe minder doel, het is al methode wat de klok slaat. Dreigt het systeem niet in het niets te verzanden? Zo zie ik in dit boekje charmante hoofdstukken over vectoren, over afbeeldingen, maar waar zie ik de oogst van deze middelen? Komt die later? Is „dat komt later – als je groot bent" – een antwoord, dat een kind bevredigt?

De theorie wordt al vragend en suggererend opgebouwd; als een leerling zelfstandig de schakels kan aanbrengen, ja, dan kan hij zelfstandig werken en denken . . . aan het handje geleid. Maar die opbouw is bijzonder mooi uitgevoerd!

Ik zou graag willen weten hoe of dit boek moet worden gebruikt. Wat gebeurt er met de leerling, die de schakels niet zelf kan vinden en bevestigen? Worden de bewijzen klassikaal genoteerd? Zijn sommige leerlingen verder gevorderd dan anderen? Is het boek daarom voor normaal klassikaal gebruik wel geschikt? Hoe vindt de controle plaats op het verwerkt hebben? Proefwerken met een theoretische inslag?

De inhoud geeft een restant van de traditionele leerstof; het is niet het gebruikelijke derde deel over de cirkels. Dat vind ik een pluspunt, want een deel der cirkelstof kan mij gestolen worden. Behalve die opruiming van cirkelrestanten en de genoemde passages over vectoren en transformaties komt tenslotte een hoofdstuk over algemene methoden voor het oplossen van meetkundige vraagstukken". Daarop had ik al een tijd zitten wachten en mijn wachten werd dus beloond. Een grote stap tot de vrede!

Heyermans laat zijn Wijze Kater aan een fijn diner vragen om een lekker bakkie doodgewone melk. Mag uw zeker niet wijze berichtgever nu ook vragen om een lekker bakkie, zij het dan niet gevuld met melk maar met wat hartige sommetjes? Het bakkie wordt wel aangeboden in de vorm van 29 „vragen" over de regels der wiskunde. Ik had er wel een paar honderd gelust. Misschien kan hier en daar een enkele leerling mijn hongerig gevoel waarderen. Dat zou dan die ene kunnen zijn, aan wie de liefde voor het spel, dat meetkunde is, niet is voorbijgegaan.

Veel waardering en veel vraagtekens. Over het laatste heb ik in verhouding te veel gezegd, over mijn waardering te weinig. De auteurs kunnen zich daarvan verzekerd weten. Moge uitgebreid met dit boek worden geëxperimenteerd.

Groenman

R. Troelstra, Drs. A. N. Habermann, A. J. de Groot, Ir. J. Bulens, *Transformatiemeetkunde* 3, geb. *f* 3.50, Wolters 1964.

Met de verschijning van deel 3 is het boek voltooid; na de kennisname van beide eerste delen, is men benieuwd naar het sluitstuk der trilogie. Stof en behandeling werken dat sterk in de hand.

Het begrip verzameling staat centraal; men krijgt zelfs de indruk, dat de cirkelmeetkunde alleen maar dient om een terrein van toepassing te bezitten. Met de traditionele meetkunde heeft het boek dan ook niet veel van doen. De lezer weet aan het eind van het boek niets meer van cirkels dan aan het begin. Wat over hoeken en bogen – alleen middelpuntshoek en omtrekshoek; niets over produktstellingen bij de cirkel, een beetje over om- en ingeschreven cirkel en over de koordenvierhoek. Tenslotte een verstandig hoofdstukje over oppervlak en omtrek van de cirkel, dat weinig past in het geheel – waar zijn de verzamelingen? – maar dat terecht niet is weggelaten. Het zal dus duidelijk zijn, dat het boek niet bedoeld is en ook niet bruik-

baar is als handleiding voor examendril – ik denk aan b.v. de opleiding voor het staatsexamen HBS-A op onze avondlycea. Ook als voorbereiding voor op normale wijze gegeven stereometrie, heeft het m.i. geen waarde. Men kan zich de vraag stellen, waarom in de titel nog het woord „meetkunde" staat, al staat hier en daar een – overigens uitstekende – tekening van een bekende figuur. De lezer krijgt de indruk, dat een nieuw vak op onze scholen wordt gebracht, dat om aan het programma te voldoen – met de naam „meetkunde" het onderwijs in moet. Je kunt het reglement nu eenmaal niet zo maar terzijde schuiven.

Resumerend kan men dus zeggen: in normale zin als meetkundeboek bezien „ongeschikt".

Desondanks of misschien juist daarom een hoogst boeiend boek. Dat geldt in het bijzonder voor de laatste hoofdstukken, die transformaties behandelen en groepen van transformaties. De tekst is leesbaar en duidelijk en wordt begeleid door passende vraagstukken. De kans is er m.i. wel, dat de leerling sterk aan de hand wordt gehouden, terwijl hier en daar een geringe gekunsteldheid niet kon worden vermeden. Ik meen, dat de vraagstukken niet moeilijk zijn, terwijl een zekere eenvormigheid merkbaar is. Het is best mogelijk, dat dit boek de toekomstige richting van het „meetkunde"onderwijs aangeeft of althans sterk zal gaan beïnvloeden. Dit is dan zonder twijfel een richting met kansen; de richting breekt met de meetkunde, waarmee ik vrede heb. De waarde van ons traditionele derde deel over de cirkels heb ik nooit hoog aangeslagen. Laat ons dan in deze nieuwe richting met enige weemoed de – „meetkunde" vaarwel zeggen en daarnaast een wiskunde begroeten, waarvan de waarde niet valt aan te vallen. Stel ik mij naast de auteurs – dat gebeurt niet contre coeur – dan heb ik een paar opmerkingen.

Ik kan mij niet aan de indruk onttrekken, dat de verzamelingen soms als kanon worden aangewend bij een mussenjacht. Moeilijk kan ik mij voorstellen, dat een leerling behoefte heeft om in een omgeschreven cirkel van een driehoek een doorsnede te zien van twee verzamelingen (bundels) van cirkels. Daarmee is niets ten nadele gezegd van het kanon, wel over zijn doeltreffend gebruik.

Op pag. 41 staat dat „speciaal" voor een koordenvierhoek geldt, dat de som van twee overstaande hoeken 180° is. Er wordt alleen bewezen, dat bij een koordenvierhoek deze eigenschap geldt, terwijl ik de omkering niet kan vinden .Als men met verzamelingen werkt, kan men toch laten zien, dat de verzameling der vierhoeken, waarvan de hoekpunten op één cirkel liggen identiek is met die der vierhoeken, waarvan de som van twee tegenover elkaar gelegen hoeken 180° is. Het woord „speciaal" is mij als wiskundige term onbekend, al vermoed ik dat daarachter de begrippen „noodzakelijk" en „voldoende" opdoemen. Reeds in de volgende paragraaf van vraagstukken heeft men juist de omkering nodig: „welke van de bijzondere veelhoeken als rechthoek e.d. zijn koordenvierhoeken?"

Men voelt zich verward na het lezen van dit boek, vandaar een mogelijk verwarde bespreking, die bovendien niet kort mag zijn, omdat het boek niet met enkele volzinnen kan worden afgehandeld. Enerzijds zegt men „neen"; anderszijds beseft men dat, dat „neen" slechts voorlopig en voorwaardelijk is; op de achtergrond hoort men een gematigd „ja" dan ook al klinken. Hier is sprake van een verantwoorde poging tot nieuwbouw – geen verbouw – van ons meetkundeonderwerp. Deze bespreking moge derhalve een opwekking zijn om van het boek persoonlijk kennis te nemen teneinde zich een eigen oordeel te vormen. Een woord van bewondering voor initiatief en moed aan het adres van auteurs en uitgever moge deze bespreking dan ook besluiten.

Groenman

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Notulen van de Ledenvergadering op vrijdag 28 augustus 1964 om 14.30 uur in Gebouw „Op Gouden Wieken" te Scheveningen

De vergadering werd geopend door de voorzitter, Dr. P. G. J. Vredenduin, die de aanwezigen welkom heette en zich daarbij in het bijzonder richtte tot Inspecteur Westerhof, de sprekers en de vertegenwoordigers van zusterverenigingen. De notulen van de vorige ledenvergadering werden ongewijzigd goedgekeurd en de kas bleek gecontroleerd te zijn blijkens een aantekening in het kasboek, zodat de penningmeester kon worden gedechargeerd. Dr. J. C. van der Steen werd herkozen als bestuurslid; tegenkandidaten waren niet gesteld. De voorzitter deelde nog mee, dat de prijs van „Euclides" van *f* 5,— op *f* 5,50 per jaar moest worden gebracht.

Vervolgens konden de aanwezigen genieten van twee voordrachten: Ir. J. R. D. Stoute (Bergen N.H.) sprak over „Oude en nieuwe atoomreactoren" en A. F. van Tooren (Den Haag) over „Een algebra-experiment". De laatstgenoemde voordracht zal in „Euclides." worden gepubliceerd.

Van de eerste voordracht maakte Dr. C. P. Koene de volgende korte samenvatting.

Spreker wil de titel wijzigen in: Wat verstaat men onder een „kweekreactor"? Met „kweekreactor", ook wel „broedreactor", bedoelt men een reactor, waarin in een zeker tijdsverloop méér splijtbaar materiaal wordt gevormd, dan er in diezelfde tijd wordt verbruikt. Om dit te kunnen begrijpen is het nodig inzicht te hebben in de factoren, die hierbij een rol spelen. Spr. behandelt hiervan eerst de werkzame doorsnede van een element voor neutronen. Deze is (afgezien van de dimensie) te vergelijken met de kans dat een neutron in die kern binnendringt. Daarbij moet onderscheid gemaakt worden tussen vangst met daarop volgende splijting en vangst met vorming van een isotoop. Alleen bij de eerste worden er enkele nieuwe snelle neutronen gevormd (energie ca. 1 MeV), die de reactie kunnen doen voortgaan. Indien men de gevormde snelle neutronen door een moderator tot thermische waarden (ca. 25 keV) wil verlangzamen, zullen er vele verloren gaan door vangst en isotoopvorming zonder splijting. De grootte van de werkzame doorsnede voor het ene en voor het andere geval is sterk afhankelijk van de energie van de neutronen.

Na deze werkzame doorsnede behandelt spr. nog enkele andere factoren om ten slotte te komen tot de z.g. vermenigvuldigingsfactor k. Als men het proces begint met n snelle neutronen, dan zijn er „na één generatie" $k \, . \, n$ snelle neutronen beschikbaar.

$k < 1$ betekent dat het aantal neutronen afneemt, dus dat de reactie dooft. De reactor heet in dat geval onderkritisch.

$k = 1$ betekent dat de reactie zichzelf juist onderhoudt; de reactor is kritisch.

$k > 1$ betekent een voortdurende vermeerdering van het aantal neutronen; de reactor is overkritisch.

Regelen van een reactor (dus beïnvloeden van de factor k) is mogelijk dan zij het feit, dat een deel van de bij de splijting gevormde neutronen niet onmiddellijk, maar met enige vertraging ontstaat (ca. 1/1000 sec). Het is daardoor mogelijk stoffen in de reactor te brengen, die wel sterk absorberen maar niet splijten (b.v. een staaf cadmium), zodat het teveel aan neutronen wordt weggenomen. Alleen als, zonder rekening te houden met de voor het vormen van meer splijtbaar materiaal benodigde neutronen, k belangrijk groter is dan 1 is het mogelijk tot een kweekreactor te komen.

Vervolgens gaat spr. na bij welke splijtbare stoffen en bij welke neutronen-

energieën de kans op het „broeden" het grootst is. Uit de experimenteel gevonden waarden voor de werkzame doorsneden, halveringstijden van tussenprodukten, enz., blijkt dat het gebruik van snelle neutronen gunstiger is dan dat van thermische neutronen. In het eerste geval blijken er méér splijtbare elementen tot het doel te kunnen leiden, dan in het laatste geval.

Rekening houdend met o.a. de vereiste hoeveelheden te gebruiken stoffen, hun prijzen, de benodigde koelmiddelen, enz., komt spr. tot de conclusie dat de snelle kweekreactoren de toekomst hebben. Zij kunnen eventueel t.z.t. concurreren met de tot nu toe gebruikte energiebronnen. Er zijn er reeds enkele in bedrijf. maar er zal nog veel onderzocht moeten worden alvorens de zaak economisch werkt.

Beide sprekers beantwoordden nog enige vragen en werden door de aanwezigen met een hartelijk applaus en door de voorzitter met enige welgekozen woorden bedankt.

Van de rondvraag maakte de vertegenwoordiger van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O., Drs H. C. Vernout, gebruik om mede namens de andere vertegenwoordigers van zusterverenigingen te danken voor de ontvangen uitnodiging. Daarna sluiting.

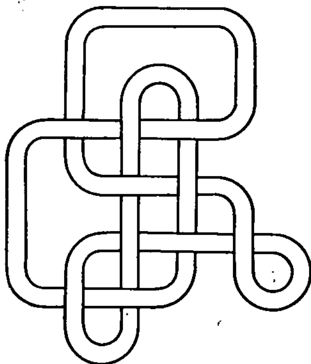
De secretaris,
D. Leujes

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

132. Onderstaande opgave en de oplossing zijn ontleend aan een college van Prof. Dr. N. G. de Bruyn tijdens de heroriënteringscursus topologie.

Een landeigenaar legt op zijn terrein een gesloten racebaan aan voor auto's. Om ongelukken tegen te gaan, wil hij de baan vrij laten maken van gelijkvloerse kruisingen. Hij geeft daartoe de opdracht ervoor te zorgen, dat men bij het doorlopen van de baan beurtelings over een viaduct heen en onder een viaduct door gaat. De situatie, die daardoor ontstaat, is in de figuur weergegeven. Het blijkt, dat in dit geval aan de opgave voldaan kan worden. Is dit toeval of is dit altijd het geval? (Ondersteld wordt, dat bij het doorlopen van de baan geen enkel punt meer dan tweemaal bereikt wordt)



133. Er zijn vijf zakken, die elk 100 munten bevatten. Elke munt weegt 10 gram, 11 gram of 12 gram. In elke zak zitten munten, die alle hetzelfde gewicht hebben. Er wordt gevraagd in één weging uit te maken, welk gewicht de munten in de vijf zakken hebben. (B. Kootstra)

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

129. In een periode van 400 jaar komen $100 - 4 + 1 = 97$ schrikkeljaren voor. Dus hebben 400 jaar $400 \cdot 365 + 97 = 146097$ dagen. Dit is deelbaar door 7. Er zijn dus maar vier verschillende dagen van de week, die aan het begin van een eeuw kunnen voorkomen. Dit blijken te zijn: maandag, dinsdag, donderdag, zaterdag. De kans, dat de eerste dag van een eeuw een zondag is, is dus 0.

130. Als hij $q + 1$ sokken uit de kast neemt, is daar in elk geval een paar bij, dat gelijke kleur heeft. Neemt hij 2 sokken meer, dan heeft hij in elk geval een tweede paar gelijkgekleurde sokken. Telkens als hij 2 sokken meer neemt, wordt dit aantal paren 1 groter. Dus moet hij uit de kast minstens $q + 2k - 1$ sokken nemen.

We kunnen echter ook andersom redeneren. Als we alle $2p$ sokken kiezen, hebben we p paar. Als we $2p - 1$ sokken nemen, hebben we $p - 1$ paar, . . ., als we $2p - q$ sokken nemen, hebben we minstens $p - q$ paar. Maar ook als we $2p - (q + 1)$ sokken nemen, hebben we minstens $p - q$ paar. En nu wordt het minimale aantal paren verder steeds 1 kleiner, als we 2 sokken minder nemen. We krijgen nu als uitkomst:

$$2p - (p - k) = p + k, \text{ als } p - k < q,$$
$$2p - 2(p - k) + q - 1 = q + 2k - 1, \text{ als } p - k \geqq q.$$

Het in de eerste alinea gevonden antwoord kan niet onder alle omstandigheden het juiste zijn, omdat het groter dan $2p$ kan worden. Nu is in het geval $p - k < q$

$$p + k \leqq q + 2k - 1.$$

Hieruit volgt, dat onder alle omstandigheden het in de tweede alinea gevonden antwoord het juiste is, terwijl het in de eerste alinea gevonden antwoord alleen maar juist is als het samenvalt met het in de tweede alinea gevondene.

131. Kies drie punten A, B en C, die niet collineair zijn (A3). Trek door A en B een lijn l (A1) en door A en C een lijn m (A1). Trek door C een lijn $p \parallel l$ (A4) en door B een lijn $q \parallel m$ (A4). De lijnen p en q snijden elkaar in een punt D (A5). Er is een lijn r door B en D (A1). We bewijzen gemakkelijk, dat al deze lijnen en al deze punten verschillend zijn. Er zijn dus minstens vier punten en minstens zes lijnen.

Neem nu aan, dat er niet meer dan vier punten zijn. Dan is er, omdat aan A2 niet voldaan is, b.v. nog een tweede lijn p' door C en D. Als p' niet door A en niet door B gaat, dan gaan er door C twee lijnen, nl. p en p', evenwijdig aan l, hetgeen in strijd is met A5. Als p' door b.v. A gaat, dan zal de lijn s door B evenwijdig aan p' alleen punt B bevatten. Door B gaan dan twee lijnen s en l evenwijdig aan p, hetgeen weer in strijd is met A5. De constructie van een model, dat aan de gestelde eis voldoet en uit vier punten bestaat, is dus onmogelijk.

Een model, dat uit vijf punten bestaat, is wel mogelijk. Noem de punten A, B, C, D, E. Aan de vraag voldoet dan het zestal lijnen:

ABC en DE, ABD en CE, ABE en CD.

Omdat dit model het minimum aantal lijnen, nl. zes, bevat, voldoet het tevens aan de onder b gestelde eis.